6 Programación lineal

6.1 El problema de la programación lineal

En muchos problemas del comercio y de la industria, es importante tomar las decisiones que maximizan o minimizan una determinada cantidad. Por ejemplo, la gerencia de una planta podría estar interesada en establecer la forma más económica de transportar la producción desde la fábrica hasta los mercados; un hospital, en diseñar una dieta que satisfaga ciertos requisitos nutricionales a mínimo coste; un inversionista, en elegir las opciones que maximicen sus ganancias; o un fabricante, en mezclar ingredientes según ciertas especificaciones, pero de modo que obtenga el mayor beneficio. En esta sección daremos varios ejemplos de problemas de programación lineal y mostraremos cómo se pueden formular modelos matemáticos para ellos. También consideraremos su solución geométrica.

Ejemplo 1 **Un problema de producción**

Un pequeño fabricante de productos para fotografía prepara diariamente dos tipos de reveladores de película: fino y extrafino. Para ello utiliza como materia prima dos soluciones, A y B. Supongamos que cada cuarto de revelador fino contiene 2 onzas (~60gr.) de solución A y 1 onza (~30gr.) de solución B, mientras que cada cuarto de revelador extrafino contiene 1 onza de solución A y 2 onzas de solución B.

Supongamos también que la ganancia por cada cuarto de fino es de 8 céntimos, y que la de extrafino es de 10 céntimos por cada cuarto. Si la empresa dispone diariamente de 50 onzas de solución A y de 70 onzas de solución B, ¿cuántos cuartos de revelador fino y cuántos de extrafino debe producir para maximizar su ganancia (suponiendo que la tienda puede vender todo lo que fabrica)?

Formulación matemática

Sean x e y el número de cuartos de revelador fino y de revelador extrafino que se producirán, respectivamente. Dado que cada cuarto de fino contiene 2 onzas de solución A y cada cuarto de extrafino contiene 1 onza de solución A, la cantidad total de solución A requerida es:

$$2x + y$$

Asimismo, como cada cuarto de extrafino contiene 1 onza de solución B y cada cuarto de extrafino contiene 2 onzas de solución B, la cantidad total de solución B requerida es:

$$x + 2y$$

Dado que solamente disponemos de 50 onzas de solución A y de 70 onzas de solución B, debemos tener:

$$2x + y \leq 50$$
$$x + 2y \leq 70.$$

Por supuesto, como x e y no pueden ser negativos, también debe cumplirse que:

$$x \geq 0 \text{ y } y \geq 0.$$

Finalmente, puesto que la ganancia generada por cada cuarto de fino es de 8 céntimos y la generada por cada cuarto de extrafino es de 10 céntimos, la ganancia total (en céntimos) es:

$$z = 8x + 10y.$$

Nuestro problema se puede enunciar en términos matemáticos así: determinar los valores de x e y que maximicen la función:

$$z = 8x + 10y$$

sujetos a las siguientes restricciones (que deben ser satisfechas por x e y):

$$\begin{gathered} 2x + y \leq 50 \\ x + 2y \leq 70 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{gathered}$$

Ejemplo 2 **Contaminación**

Un fabricante elabora cierto producto químico en cualquiera de sus dos plantas, X e Y. La planta X puede fabricar un máximo de 30 toneladas por semana y la planta Y un máximo de 40 toneladas por semana. El fabricante quiere producir por lo menos 50 toneladas por semana. Se encontró que, semanalmente, la cantidad de partículas suspendidas en la atmósfera de una población vecina es de 20 kilos por cada tonelada del producto fabricada en la planta X, y es de 30 kilos por cada tonelada fabricada en la planta Y. ¿Cuántas toneladas deben fabricarse semanalmente en cada planta para minimizar la cantidad total de partículas suspendidas en la atmósfera?

Formulación matemática

Sean x e y las toneladas del producto fabricadas en las plantas X e Y, respectivamente, cada semana. La cantidad total producida semanalmente es, entonces $x + y$.

Como se quiere producir al menos 50 toneladas por semana, debemos tener $x + y \geq 50$.
La planta X puede fabricar como máximo 30 toneladas semanales. Esto significa que $x \leq 30$.
Análogamente, la planta Y puede fabricar como máximo 40 toneladas semanales. Entonces se debe cumplir que $y \leq 40$.

Por supuesto, x e y no pueden ser negativos, es decir, se requiere $x \geq 0. y \geq 0$.

La cantidad total de partículas suspendidas (en kilos) es $z = 20x + 30y$, cantidad que queremos minimizar. En consecuencia, podemos formular matemáticamente nuestro problema así: determinar valores de x e y que minimicen $z = 20x + 30y$, y que satisfagan las siguientes restricciones:

$$\begin{gathered} x + y \geq 50 \\ x \leq 30 \\ y \leq 40 \end{gathered}$$

$$x \geq 0$$
$$y \geq 0.$$

Ejemplo 3 **El problema de la dieta**

Un nutricionista planifica un menú, con los alimentos A y B como componentes principales. Cada onza del alimento A contiene 2 unidades de proteína, 1 unidad de hierro y 1 unidad de tiamina; cada onza del alimento B contiene 1 unidad de proteína, 1 unidad de hierro y 3 unidades de tiamina. Además, cada onza de A cuesta 30 centavos, mientras que cada onza de B cuesta 40. El especialista quiere que el menú proporcione al menos 12 unidades de proteína, 9 de hierro y 15 de tiamina. ¿Cuántas onzas de cada uno de los alimentos debe emplear para minimizar el coste del mismo?

Formulación matemática

Sean x e y el número de onzas de los alimentos A y B que deben utilizarse, respectivamente. El aporte de unidades de proteína del menú es $2x + y$, de modo que se requiere $2x + y \geq 12$.

El número de unidades de hierro proporcionadas por el menú es $x + y$, lo cual implica que

$$x + y \geq 9.$$

El aporte total de unidades de tiamina es $x + 3y$, en consecuencia, $x + 3y \geq 15$

Por supuesto, se requiere que

$$x \geq 0, y \geq 0.$$

El costo (en céntimos) del menú es

$$z = 30x + 40y$$

cantidad que se busca minimizar. Por lo tanto, una formulación matemática de nuestro problema es: determinar valores de x e y que minimicen

$$z = 30x + 40y$$

sujetos a las restricciones

$$2x + y \geq 12$$
$$x + y \geq 9$$
$$x + 3y \geq 15$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

Éstos son ejemplos típicos de los problemas de programación lineal. Su forma general es: determinar valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que minimicen o maximicen

$$z = c_1x_1 \ + c_1x_1 + \ldots c_nx_n \qquad (1)$$

sujetos a

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n (\leq)(\geq)(=) \ b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n (\leq)(\geq)(=) \ b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n (\leq)(\geq)(=) \ b_m \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (1 \leq j \leq n) \qquad (3)$$

donde, en cada relación de (2), aparece uno y solamente uno de los símbolos ≤, ≥ o =. La función lineal (1) se conoce como **función objetivo**. Las igualdades o desigualdades en (2) y (3) son las **restricciones**. En el contexto de la programación lineal, el término lineal significa que la función objetivo (1) y cada una de las restricciones en (2) son funciones lineales de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La palabra "programación" no debe confundirse con su uso en la programación de computadoras; se refiere a las aplicaciones a problemas de planificación o de asignación de recursos.

6.1.1 Solución geométrica

Ahora desarrollaremos un método geométrico para resolver problemas de programación lineal con dos variables. Este enfoque nos permitirá solucionar los problemas que acabamos de plantear. Como la programación lineal involucra sistemas de desigualdades lineales, las estudiaremos primero desde un punto de vista geométrico.

Consideremos el Ejemplo 1: determinar el conjunto de puntos que maximizan:

$$z \ = \ 8x \ + \ 10y. \qquad (4)$$

sujetos a las restricciones:

$$\begin{aligned} 2x + \ y &\leq 50 \\ x \ + \ 2y \ &\leq \ 70 \qquad (5) \\ x &\geq 0 \\ y &\geq \ 0. \end{aligned}$$

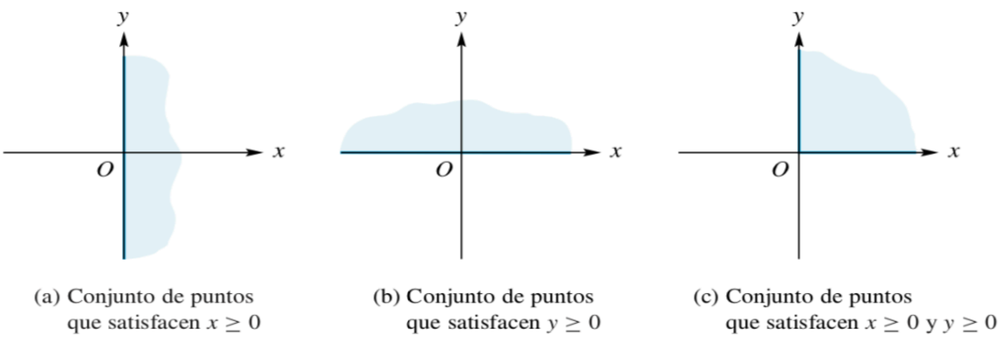

Figura 6-1

El conjunto de puntos que satisfacen el sistema (5) formado por las cuatro desigualdades, es el conjunto de puntos que satisfacen simultáneamente a cada una de ellas. La Figura 6-1 (a) muestra el conjunto de puntos que satisfacen la desigualdad x ≥ 0, y Figura 6-1 (b) el conjunto de puntos que satisfacen la desigualdad y ≥ 0. El conjunto de puntos que satisfacen ambas desigualdades x ≥ 0 e y ≥ 0, es la intersección de las regiones que se muestran en la Figura 6-1 (a) y la Figura 6-1 (b) Este conjunto, es el conjunto de todos los puntos del primer cuadrante, y aparece en la Figura 6-1 (c).

Determinaremos ahora el conjunto de puntos que satisfacen la desigualdad:

$$2x + y \leq 50 \qquad (6)$$

En primer lugar, consideremos el conjunto de puntos que satisface la desigualdad estricta:

$$2x + y < 50 \qquad (7)$$

La línea recta:

$$2x + y = 50 \qquad (8)$$

divide el conjunto de puntos que no están sobre la recta en dos regiones (Figura 6-2); una de ellas contiene todos los puntos que satisfacen (7), y la otra todos los puntos que no la satisfacen. La propia recta, correspondiente a (8), y trazada con líneas punteadas, no pertenece a ninguna de estas regiones.

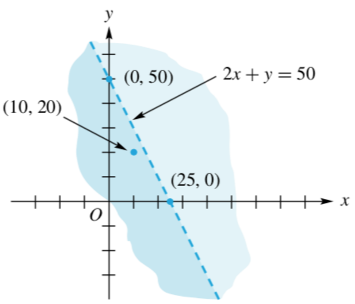

Figura 6-2

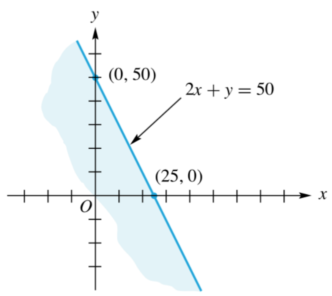

Figura 6-3

El conjunto de puntos que satisfacen la desigualdad (6) está formado por aquellos puntos que satisfacen (7) y se encuentran sobre la recta (8). Por lo tanto, la región correspondiente a (6), que aparece en la Figura 6-3, incluye la línea recta, que ha sido trazada en forma continua.

De forma similar se establece el conjunto de puntos que satisfacen la desigualdad

$$x + 2y \leq 70 \quad (9)$$

Como se muestra en la Figura 6-5

El conjunto de puntos que satisfacen las desigualdades (6) y (9) es la intersección de las regiones que se muestran en las figuras Figura 6-3 y Figura 6-5; es la región sombreada que aparece en la Figura 6-4

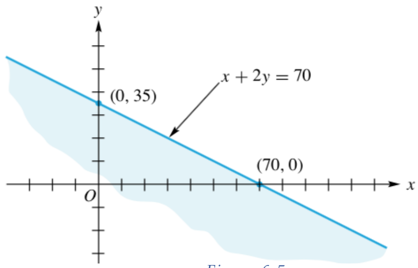

Figura 6-5

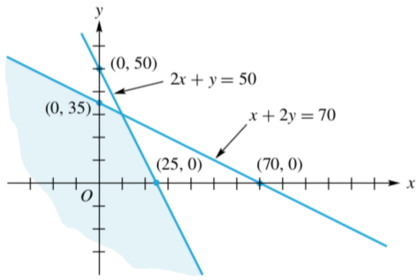

Figura 6-4

Por último, el conjunto de puntos que satisfacen las cuatro desigualdades (5) es la intersección de las regiones sombreadas de las figuras Figura 6-1 (c) y Figura 6-4. Es decir, es el conjunto de puntos de la Figura 6-5 que están en el primer cuadrante. Este conjunto de puntos aparece en la Figura 6-6. Hemos mostrado que el conjunto de puntos que satisfacen un sistema de desigualdades es la intersección de los conjuntos de puntos que satisfacen cada una de las desigualdades.

Un punto que satisface las restricciones de un problema de programación lineal es una **solución factible**; el conjunto de todos estos puntos es la **región factible**. Debemos observar que no todo problema de programación lineal tiene una región factible, como muestra el siguiente ejemplo.

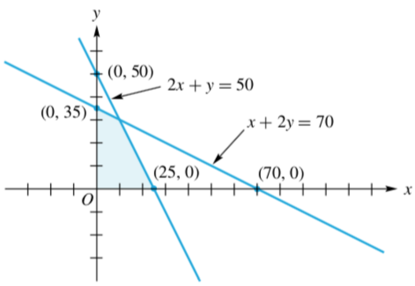

Figura 6-6

Ejemplo 4 Determinar el conjunto de puntos que maximizan

$$z = 8x + 10y \quad (10)$$

sujetos a las restricciones:

$$
\begin{aligned}
2x + 3y &\leq 6 \\
x + 2y &\geq 6 \\
x &\geq 0 \qquad\qquad (11) \\
y &\geq 0.
\end{aligned}
$$

En la Figura 6-7 hemos designado como región I al conjunto de puntos que satisfacen la primera, la tercera y la cuarta desigualdades; es decir, la región I es el conjunto de puntos que están en el primer cuadrante y satisfacen la primera desigualdad en (11). De manera similar, la región II es el conjunto de puntos que satisfacen la segunda, la tercera y la cuarta desigualdades. Es obvio que no hay puntos que satisfagan las cuatro desigualdades.

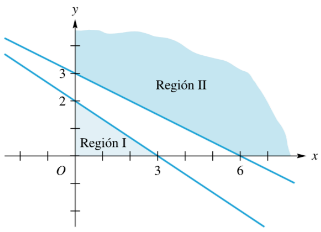

Figura 6-7

Para resolver el problema de programación lineal del Ejemplo 1, debemos determinar una solución factible que produzca el valor más grande posible de la función objetivo (1); es decir, tenemos que encontrar la solución óptima. Como hay una infinidad de soluciones factibles, a primera vista parece muy difícil decidir si una solución factible es óptima o no. En la Figura 6-8 presentamos nuevamente la Figura 6-6 y mostramos la región factible de este problema de programación lineal, junto con varias soluciones factibles representadas por los puntos *O, A, B, C, D* y *E*. Los puntos *F* y *G* no están en la región factible.

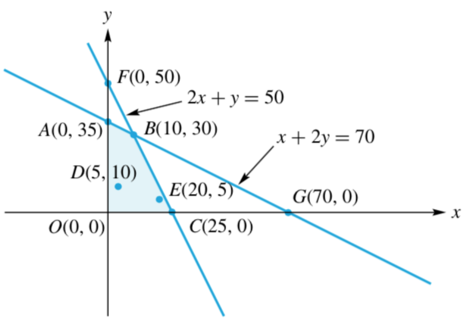

Figura 6-8

Punto	Valor de $z = 8x + 10y$ (centavos)
$O(0, 0)$	0
$A(0, 35)$	350
$B(10, 30)$	380
$C(25, 0)$	200
$D(5, 10)$	140
$E(20, 5)$	210

Tabla 6-1

En la Tabla 6-1 aparece el valor de la función objetivo (en céntimos) para cada uno de los puntos O, A, B, C, D y E. Vemos que el valor más grande de la función objetivo, calculado en las soluciones factibles O, A, B, C, D y E, se alcanza en el punto $B(10, 30)$. Sin embargo, no sabemos si hay otra solución factible en la cual el valor de la función objetivo sea mayor que el valor en B. Como hay una infinidad de soluciones factibles en la región, no es posible determinar el valor de la función objetivo en cada una de ellas. No obstante, podremos establecer las soluciones óptimas sin examinar todas las soluciones factibles. Necesitaremos primero algunos conceptos auxiliares.

Definición 1

El **segmento de recta** que une los puntos distintos $\boldsymbol{x_1}$ y $\boldsymbol{x_2}$ de $\mathbb{R}^n$ es el conjunto de puntos de la forma $\lambda\boldsymbol{x_1} + (1-\lambda)\,\boldsymbol{x_2},\ 0 \leq \lambda \leq 1$. Observe que si $\lambda = 0$, obtenemos $\boldsymbol{x_2}$, y si $\lambda = 1$, obtenemos $\boldsymbol{x_1}$.

$$[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2] = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n; \boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x_1} + (1-\lambda)\,\boldsymbol{x_2};\ \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0,1]\}$$

Definición 2

Un conjunto S no vacío en $\mathbb{R}^n$ es **convexo** si el segmento de recta que une cualesquiera dos puntos de S está completamente contenido en S.

$$\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in S \Longrightarrow \lambda\boldsymbol{x_1} + (1-\lambda)\,\boldsymbol{x_2} \in S, \lambda \in [0,1]$$

Ejemplo 5

Los conjuntos sombreados de la Figura 6-9 son conjuntos convexos en $\mathbb{R}^2$. Los conjuntos sombreados de la Figura 6-10 *no* son conjuntos convexos en $\mathbb{R}^2$, pues el segmento de recta que une los puntos indicados no está completamente dentro del conjunto.

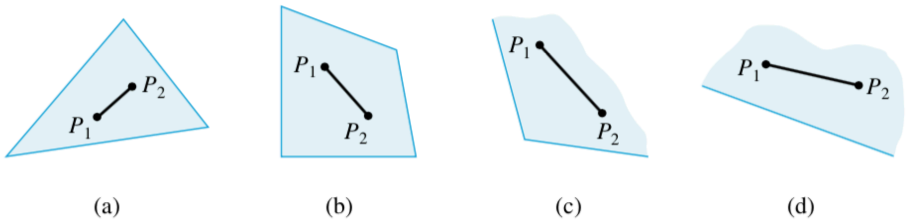

Figura 6-9

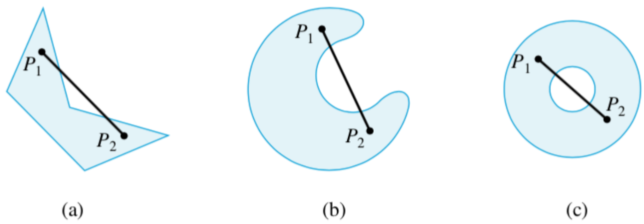

Figura 6-10

No es muy difícil demostrar que <u>la región factible de un problema de programación lineal es un conjunto convexo</u>

Se puede verificar que las regiones factibles para los problemas de programación lineal del Ejemplo 2 y del Ejemplo 3 son convexos.

Ahora limitaremos nuestro análisis de los conjuntos convexos a conjuntos en $\mathbb{R}^2$, aunque las ideas aquí presentadas se pueden generalizar a conjuntos convexos en $\mathbb{R}^n$.

Los conjuntos convexos pueden ser **acotados o no acotados**. Un conjunto convexo es acotado si se puede encerrar en un rectángulo suficientemente grande; un conjunto convexo es no acotado si no se puede encerrar de esta forma. Los conjuntos convexos de la Figura 6-9 (a) y (b) son acotados; los conjuntos convexos de la Figura 6-9 (c) y (d) no son acotados.

Definición 3

Dado un conjunto convexo $S \subseteq \mathbb{R}^n$, se dice que $\boldsymbol{x} \in S$ es un **punto extremo o vértice** de S si es un punto de S que no es un punto interior de algún segmento de recta en S. Esto se produce cuando no es posible expresar $\boldsymbol{x}$ como combinación lineal convexa de otros dos puntos distintos de S.

Es decir, $\boldsymbol{x}$ es un punto extremo si $\nexists /\ \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in S, \boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2 \ / \boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x_1} + (1-\lambda)\,\boldsymbol{x_2}$

En la Figura 6-11 hemos señalado los puntos extremos de los conjuntos convexos de la Figura 6-9(a), (b) y (c) mediante puntos de mayor tamaño. El conjunto convexo de la Figura 6-9 (d) no tiene puntos extremos.

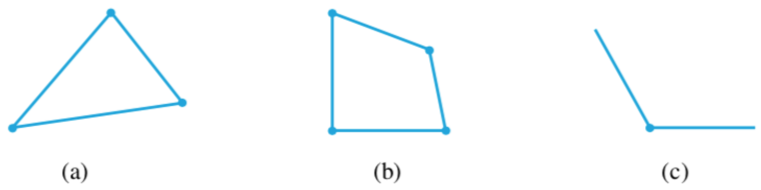

Figura 6-11

El resultado básico que relaciona los conjuntos convexos, los puntos extremos y los problemas de programación lineal es el siguiente teorema, cuya demostración se omite.

Teorema 1

Sea S la región factible de un problema de programación lineal.

(a) Si S es acotada, entonces la función objetivo

$$z = ax + by$$

alcanza sus valores máximo y mínimo en S; estos valores ocurren en puntos extremos de S.

(b) Si S no es acotada, entonces puede, o no, alcanzarse un valor máximo o mínimo en S. Si hay un valor máximo o mínimo en S, éste ocurre en un punto extremo.

Entonces, cuando la región factible S de un problema de programación lineal es acotada, un método para resolver el problema consiste en determinar los puntos extremos de S y evaluar la función objetivo $z = ax + by$ en cada uno de ellos. Una solución óptima es un punto extremo en el cual el valor de z es un máximo o un mínimo.

Procedimiento para resolver geométricamente un problema de programación lineal de dos variables

Paso 1. Trazar la región factible S.

Paso 2. Determinar todos los puntos extremos de S.

Paso 3. Evaluar la función objetivo en cada punto extremo.

Paso 4. Elegir un punto extremo en el cual la función objetivo tiene el valor más grande (más pequeño) para un problema de maximización (minimización).

Consideremos de nuevo el Ejemplo 1 . La región factible que aparece en la Figura 6-8 es acotada y sus puntos extremos son $O(0,0), A(0,35), B(10,30)$ y $C(25,0)$. La Tabla 6-1 muestra que el valor de z es máximo en el punto extremo $B(10,30)$. Por lo tanto, la solución óptima es

$$x = 10, \qquad y = 30.$$

Esto significa que el fabricante debe producir 10 cuartos de revelador fino y 30 cuartos de extrafino, para maximizar su ganancia. En tal caso, su ganancia máxima diaria será de 3,80 euros. En este problema hemos elegido números pequeños, para reducir la magnitud de los cálculos. En un problema real, los números serían mucho mayores.

En la Figura 6-8, observamos que los puntos $(70, 0)$ y $(0, 50)$ son puntos de intersección de rectas frontera (límite). Sin embargo, no son puntos extremos de la región factible, puesto que no son soluciones factibles; es decir, no están dentro de la región factible.

Punto	Valor de $z = 20x + 30y$ (libras)
$A(10, 40)$	1400
$B(30, 40)$	1800
$C(30, 20)$	1200

Tabla 6-2

Resolvemos el Ejemplo 2 de forma geométrica.

La región factible S de este problema de programación lineal aparece en la Figura 6-12 . Como S es acotada, determinaremos el valor mínimo de z evaluando z en cada uno de los puntos extremos. En la Tabla 6-2 hemos tabulado el valor de la función objetivo para cada uno de los puntos extremos $A(10,40), B(30,40)\ y\ C(30,20)$. El valor de z es mínimo en el punto extremo $C(30,20)$. Por lo tanto, la solución óptima es:

$$x = 30, y = 20$$

lo cual significa que el fabricante debe producir 30 toneladas del producto en la planta X y 20 toneladas en la planta Y. Si lo hace así, la cantidad total de partículas suspendidas sobre la población será de 1.200 kilos por semana.

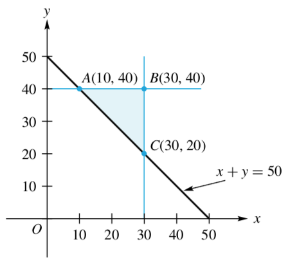

Figura 6-12

En general, un problema de programación lineal puede:

1. No tener una solución factible; es decir, que no haya puntos que satisfagan todas las restricciones de las ecuaciones (2) y (3).
2. Tener una única solución óptima.
3. Tener más de una solución óptima.
4. No tener un valor máximo (o mínimo) en la región factible; es decir, es posible elegir un punto de la región factible en el cual la función objetivo es tan grande (o tan pequeña) como se quiera.

6.1.2 Problemas estándar de programación lineal

Ahora centraremos nuestra atención en una clase particular de problemas de programación lineal, y mostraremos que todo problema de programación lineal se puede transformar en uno de esta clase particular.

Con la expresión problema estándar de programación lineal haremos referencia, en adelante, al problema de programación lineal con esta estructura: determinar valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que **maximicen**

$$z = c_1x_1 + c_1x_1 + \ldots c_nx_n \qquad (12)$$

Sujeto a las restricciones:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases} \quad (13)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (1 \leq j \leq n) \qquad (14)$$

Ejemplo 6 El problema de programación lineal:

Minimizar $z = 3x - 4y$ sujeto a las restricciones:

$$2x - 3y \leq 6$$
$$x + y \leq 8$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

no es un problema estándar de programación lineal, pues aquí se busca minimizar la función objetivo mientras que en el problema estándar se debe maximizar.

Ejemplo 7 El problema de programación lineal:

Maximizar: $z = 12x - 15y$ sujeto a las restricciones:

$$3x - y \geq 4$$
$$2x + 3y \leq 6$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

no es un problema estándar de programación lineal, porque una de las desigualdades es de la forma $\geq$, mientras que en un problema estándar cada desigualdad de (13) debe ser de la forma $\leq$.

Ejemplo 8 El problema de programación lineal:

Maximizar $z = 8x + 10y$ sujeto a las restricciones:

$$3x + y = 4$$
$$2x - 3y \leq 5$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

no es un problema estándar de programación lineal, porque la primera restricción es una ecuación y no una desigualdad de la forma $\leq$

Todo problema de programación lineal se puede transformar en un problema estándar de programación lineal.

6.1.3 Problemas de minimización vistos como problemas de maximización

Todo problema de maximización se puede ver como un problema de minimización, y viceversa. Esto es consecuencia de la igualdad:

$$Mínimo\ de\ c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = -máximo\ de\ \{-(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n)\} \qquad (15)$$

6.1.4 Inversión de una desigualdad

Consideremos la desigualdad:

$$d_1x_1 + d_2x_2 + \cdots + d_nx_n \geq -b$$

La multiplicación de ambos lados de esta desigualdad por -1 cambia el sentido de la desigualdad, así:

$$-d_1x_1 - d_2x_2 - \cdots - d_nx_n \leq b$$

Considere el siguiente problema de programación lineal:
Minimizar $w = 5x - 2y$
sujeto a:

$$\begin{aligned} 2x - 3y &\geq -5 \\ 3x + 2y &\leq 12 \\ x &\geq 0 \qquad (16) \\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

Utilizando (15), y multiplicando la primera desigualdad en (16) por (-1) obtenemos el siguiente problema en forma estándar:

Maximizar $z = -(5x - 2y) = -5x + 2y$ sujeto a:

$$\begin{aligned} -2x + 3y &\leq 5 \\ 3x + 2y &\leq 12 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

Una vez resuelto este problema de maximización, calculamos el negativo del valor máximo de z para obtener el valor mínimo de la función objetivo original, w.

6.1.5 Variables de holgura

De ser necesario hacerlo, no es difícil cambiar igualdades por desigualdades de la forma $\leq$. Es el caso del Ejemplo 8, que se puede transformar en un problema estándar de programación lineal. Pero no trataremos problemas de programación lineal de esa clase, y por lo tanto no lo analizaremos.

No es fácil trabajar algebraicamente con sistemas de desigualdades lineales. Sin embargo, no es difícil hacerlo cuando se trata de sistemas de ecuaciones lineales. Para aprovechar esta circunstancia, transformaremos nuestro problema estándar de programación lineal en otro que pide determinar variables no negativas que maximizan una función objetivo de tipo lineal, y que satisfacen un sistema dado de ecuaciones lineales. Toda solución del problema dado produce una solución del nuevo problema y, recíprocamente, toda solución del nuevo problema produce una solución del problema dado.

Consideremos la restricción:

$$d_1x_1 + d_2x_2 + \cdots + d_nx_n \leq b \qquad (17)$$

Como el lado izquierdo de (17) no es mayor que el lado derecho, podemos convertir (17) en una ecuación si agregamos una cantidad desconocida no negativa u a su lado izquierdo, para obtener:

$$d_1x_1 + d_2x_2 + \cdots + d_nx_n + u = b \qquad (18)$$

La cantidad u de (18) es una **variable de holgura**, pues constituye la holgura del lado derecho de la igualdad, con respecto a su lado izquierdo.

Con base en lo anterior, y para obtener ecuaciones, procedemos a modificar cada una de las restricciones en (2) (suponemos que representa un problema estándar de programación lineal con sólo desigualdades de tipo ≤), introduciendo en cada caso una variable (no negativa) de holgura. En la i-ésima desigualdad:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \quad (1 \leq i \leq m) \qquad (19)$$

se introduce la variable no negativa de holgura, x_{n+i} , para obtener la ecuación:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i \quad (1 \leq i \leq m)$$

Entonces, nuestro nuevo problema se puede enunciar como sigue.

6.1.6 Nuevo problema

Determinar los valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ que maximicen:

$$z = c_1x_1 \ + c_1x_1 + \ldots c_nx_n$$

Sujetos a:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + & +x_{n+2} & = b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & + x_{n+m} & = b_m \end{cases} \qquad (21)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, x_{n+1} \geq 0, \ldots, x_{n+m} \geq 0 \qquad (22)$$

Este nuevo problema tiene m ecuaciones con $m + n$ incógnitas. Resolver el problema original es equivalente a resolver el nuevo problema, en este sentido. Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una solución factible del problema dado, definido por (1), (2) y (3), entonces:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$

Además $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfacen cada una de las restricciones en (2). Definamos x_{n+i} $1 \leq i \leq m$ como:

$$x_{n+i} = b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n$$

Es decir, x_{n+i} es la diferencia entre la desigualdad derecha de (19) y su lado izquierdo, entonces:

$$x_{n+1} \geq 0, x_{n+2} \geq 0, \dots, x_{n+m} \geq 0$$

De modo que $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ satisfacen (21) y (22).

Recíprocamente, supongamos que $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ satisfacen (21) y (22). Entonces es claro que $x_1, x_2, \dots, x_n$ satisfacen (2) y (3)

Ejemplo 9

Consideremos el problema del Ejemplo 1. Si introducimos las variables de holgura u y v, podemos formular el nuevo problema de la siguiente manera: determinar valores de x, y, u y v que maximicen

$$z = 8x + 10y$$

sujetos a:

$$\begin{aligned} 2x + y + u &= 50 \\ x + 2y + \quad v &= 70 \end{aligned}$$

$$x \geq 0 \qquad y \geq 0 \qquad u \geq 0 \qquad v \geq 0$$

La variable de holgura u es la diferencia entre la cantidad disponible de la solución A, 50 onzas, y la cantidad utilizada, $2x + y$, de solución A. La variable de holgura v es la diferencia entre la cantidad disponible de la solución B, 70 onzas, y la cantidad $x + 2y$ de solución B.

Consideremos la solución factible del problema dado:

$$x = 5, y = 10$$

que representa el punto D de la Figura 6-8. En este caso obtenemos las variables de holgura:

$$u = 50 - 2(5) - 10 = 50 - 10 - 10 = 30$$
$$v = 70 - 5 - 2(10) = 70 - 5 - 20 = 45$$

De modo que:

$$x = 5, y = 10, u = 30, v = 45$$

Es una solución factible del nuevo problema. Por supuesto, la solución $x = 5$, $y = 10$

no es una solución óptima, dado que $z = 8(5) + 10(10) = 140$ y, como vimos, el valor máximo de z es 380, que se alcanza en:

$$x = 10, y = 30.$$

En este caso, la correspondiente solución óptima del nuevo problema es

$$x = 10, y = 30, u = 0, v = 0.$$